

基于动态分解和角度惩罚距离的 高维多目标进化算法

王旭健, 张峰干, 姚敏立
(火箭军工程大学, 陕西西安 710025)

摘要: 多个领域的优化可归纳为高维多目标优化问题, 高维多目标进化算法是解决此类问题的有效方法, 然而该方法普遍存在收敛性和多样性较难平衡的问题. 针对此问题, 本文提出一种基于动态分解和角度惩罚距离的高维多目标进化算法. 该算法基于动态分解将种群分成多个类, 此过程无需预先设定参考向量, 可根据种群自身分布信息进行分解. 之后, 基于改进的角度惩罚距离从每类中选择个体, 从而平衡收敛性与多样性. 此外, 设计基于 Pareto 支配、拐点、 m 近邻角度三原则的锦标赛匹配选择机制. 本文算法与 9 种高维多目标进化算法在 27 例高维多目标优化测试题上进行对比实验. 实验结果表明, 本文算法能有效解决不同类型的高维多目标优化问题, 并且在不同目标个数上具有较好的稳定性.

关键词: 多目标优化; 高维多目标优化; 动态分解; 角度惩罚距离

基金项目: 国家自然科学基金(No.62001500, No.62071480)

中图分类号: TP18

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2024)08-2773-13

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20230541

Many-Objective Evolutionary Algorithm Based on Dynamic Decomposition and Angle Penalty Distance

WANG Xu-jian, ZHANG Feng-gan, YAO Min-li
(Rocket Force University of Engineering, Xi'an, Shaanxi 710025, China)

Abstract: The optimization problems in multiple areas can be modelled as many-objective optimization problems, which can be solved using many-objective evolutionary algorithms. However, it is difficult to balance convergence and diversity. To tackle this issue, this paper proposes a many-objective evolutionary algorithm based on dynamic decomposition and modified angle penalty distance referred to as DAEA (Duplication Analysis based Evolutionary Algorithm). DAEA decomposes the whole population into multiple clusters through dynamic decomposition, which is exempt from the predefined reference vectors and makes full use of the distribution information of the population itself to decompose. Then, DAEA selects solutions from each cluster based on modified angle penalty distance to balance convergence and diversity. Besides, DAEA operates mating selection according to Pareto dominance, knee points, and m -nearest angle binary tournament selection. Compared with nine many-objective evolutionary algorithms on 27 many-objective optimization problems, DAEA is effective on many-objective optimization problems with various shapes of Pareto front and stable on different numbers of objectives.

Key words: multiobjective optimization; many-objective optimization; dynamic decomposition; angle penalty distance

Foundation Item(s): National Natural Science Foundation of China (No.62001500, No.62071480)

1 引言

众多领域的优化可归结为多目标优化问题(Multi-objective Optimization Problem, MOP), 如作业调度^[1]、云

服务集成^[2]、核酸分子设计^[3]等. 在这类优化问题中, 各优化目标相互冲突, 不存在唯一最优解使各目标同时达到最优, 一个或几个目标性能提升, 会导致其他目

标性能降低。因此,寻找能平衡多个目标优劣的 Pareto 最优解集成为解决此类问题的关键。多目标进化算法 (MultiObjective Evolutionary Algorithm, MOEA) 基于种群进化一次运行可以得到多个解,不要求优化问题具有可微等数学特性,成为求解 MOP 的有效方法。根据选择策略的不同,MOEA 一般可分为三类,即基于 Pareto 支配、基于指标、基于分解的 MOEA。

高维多目标优化问题 (Many-objective Optimization Problem, MaOP) 一般指包含 4 个及以上优化目标的 MOP^[4]。目标个数的增多,给 MOEA 解决 MaOP 带来新的挑战。比如,随目标个数增多,种群中非支配解所占比例大幅增加,传统 Pareto 支配关系无法有效区分不同个体,使基于 Pareto 支配的 MOEA 选择压力减弱;指标计算复杂度提升,耗时增加,使低维目标空间中基于指标的 MOEA 难以扩展至高维目标空间^[5]。针对上述两类方法存在的问题,已知报道提出的解决方法有:修改 Pareto 支配关系或定义新的支配关系,如模糊支配^[6,7]、网格支配^[8,9]、强化支配^[10,11]等;定义新的指标,如 IGD-NS (Inverted Generational Distance with Noncontributing Solution detection)^[12]、 I_{SDE}^+ ^[13];利用计算简单的指标辅助选择,如 IGD (Inverted Generational Distance)^[14]、R2^[15],以增强选择压力。

基于分解的 MOEA 受目标个数增多影响较小。其利用预先设定的均匀分布的参考向量,将 MOP (或 MaOP) 分解成一系列子问题,通过同时优化这些子问题实现对原始 MOP (或 MaOP) 的求解^[16]。在基于分解的 MOEA 中,常假设若参考向量均匀分布,则得到的最优解集中的个体也将均匀分布^[17]。随着研究深入,学者们发现,只有当优化问题的 Pareto 前沿形状与参考向量分布一致时,上述假设才成立^[18]。也就是说,当优化问题的 Pareto 前沿形状不规则时,参考向量的均匀分布并不能保证最优解集中个体的均匀分布。针对此问题,文献[19]提出了在进化过程中调整参考向量分布的方法,然而这一方法涉及调整时机、调整频率、调整策略等较难设计的因素,使得单一方法对不同 Pareto 前沿形状的优化问题不具普适性。机器学习方法为调整参考向量提供了新思路,如生长神经网络 (Growing Neural Gas, GNG) 网络、增量学习等。文献[20]利用外部档案集中的解对 GNG 网络进行训练,学习 Pareto 前沿的拓扑结构,将训练好的网络中的节点当作候选参考向量,然后从初始参考向量集、外部档案集、网络节点中选择使多样性最大化的参考向量作为新的参考向量。文献[21]利用 Copula 增量学习不断获取参考向量分布的隐性知识,以生成与不规则前沿优化问题匹配的非均匀分布的参考向量。这些方法涉及训练和学习过程,使算法复杂度增加,耗费更多运行

时间。

另一方面,在高维目标空间中,由于选择压力减弱,以及种群规模有限导致的个体稀疏分布,使收敛性与多样性的平衡难以实现。针对此问题,NSGA-III (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm III)^[22]在 Pareto 支配的基础上引入参考点来维持多样性;在文献[23]中,PaRP/EA (Pareto-adaptive Reference Points/Evolutionary Algorithm) 先根据非支配解分布估计 Pareto 前沿形状,再据此选择理想点或者底点作为参考点计算个体的收敛性,多样性则通过添加最大角度差异个体或者删除最相近两个个体中收敛性较差的个体实现;类似地,MaOEA/AC (Many-Objective Evolutionary Algorithm based on Adaptive Clustering)^[24]根据个体在 Pareto 前沿的映射距离聚类,然后从最相近的两个个体中删除各目标之和较大的个体来平衡多样性与收敛性。除了同时考虑收敛性与多样性,还可以在进化过程的不同阶段侧重考虑收敛性或多样性,比如 MMOEA-SP (Multistage Many-Objective Evolutionary Algorithm based on Sampling Points)^[25]和 TS-NSGA-II (Two-Stage Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II)^[26],它们根据各自设计的准则,将进化过程分成收敛性阶段和多样性阶段,在不同阶段使用不同的环境选择策略选择个体,以此在某一阶段更高效提升收敛性或多样性。MaOEA-MS (Multi-Stage MaOEA)^[27]将决策变量分析与三阶段进化策略结合,第一阶段只考虑收敛性而不考虑多样性,从而使种群迅速收敛至 Pareto 前沿,第二阶段通过决策变量分析强调多样性,第三阶段通过替换收敛性和多样性差的解对种群进行微调,三个阶段相互协同,以平衡收敛性和多样性。DREA (Decomposition-Rotation dominance based Evolutionary Algorithm)^[28]基于目标空间分解和坐标系旋转建立一种新的支配关系,以增加选择压力同时保持多样性,此外设计了根据 Pareto 前沿形状自适应调整参考点的策略,进一步协调收敛性和多样性。

针对上述两个方面,即基于分解的 MOEA 对不同优化问题的适应性、高维目标空间中收敛性与多样性的平衡,本文提出基于动态分解和角度惩罚距离的高维多目标进化算法 DAEA (Duplication Analysis based Evolutionary Algorithm),该算法先用动态分解策略将种群分成多个类,再利用改进的角度惩罚距离从每一类中选择个体。DAEA 创新点如下。

(1) 为保证多样性,DAEA 利用动态分解策略将种群分成多个类。具体来说,先根据种群中个体分布选择能最大化多样性的导向解,再根据其他解与导向解的距离划分类。此分解策略充分利用个体分布信息,无需预先设定参考向量,可求解不同 Pareto 前沿形状的优化问题。

(2)为平衡收敛性与多样性,DAEA利用角度惩罚距离从每一类中选择个体.角度惩罚距离有两个主项,即收敛性相关项和多样性相关项,收敛性相关项用个体到理想点的欧氏距离表示,多样性相关项用个体到导向解角度的正弦值表示,从而对偏离导向解较多的个体施加较大惩罚.

(3)为选择潜力解进入匹配池,引入拐点和 m 近邻角度(m 为优化目标个数)分别表征收敛性和多样性,设计基于Pareto支配、拐点、 m 近邻角度三原则的锦标赛匹配选择机制,提高变异操作产生优秀解的机率.

2 MOP数学模型和相关概念

不失一般性,以最小化为例,MOP可用以下数学模型表示:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \\ \text{Subject to: } & \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_D) \in \mathbf{R}^D$ 表示决策空间 Ω 中的决策向量; D 表示决策向量中变量的个数; $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 表示包含 m 个优化目标的目标向量,当 $m \geq 4$ 时,MOP成为MaOP.MOP(或MaOP)中有3个基本概念:

(1)Pareto支配

对 $\mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{y} \in \Omega$,称 \mathbf{x} Pareto支配 \mathbf{y} ,记作 $\mathbf{x} < \mathbf{y}$,当且仅当

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, \dots, m, f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{y}) \\ \exists j = 1, 2, \dots, m, f_j(\mathbf{x}) < f_j(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2)$$

(2)Pareto最优解集(Optimal Pareto Set, PS)

对 $\mathbf{x}^* \in \Omega$,称 \mathbf{x}^* 为Pareto最优解,当且仅当 $\mathbf{x} \in \Omega$,使 $\mathbf{x} < \mathbf{x}^*$ 成立.所有Pareto最优解构成的集合,称为Pareto最优解集.

(3)Pareto最优前沿(Optimal Pareto Front, PF)

Pareto最优前沿是Pareto最优解集从决策空间向目标空间的映射,定义为

$$\text{PF} = \left\{ \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = (f_1(\mathbf{x}^*), f_2(\mathbf{x}^*), \dots, f_m(\mathbf{x}^*)) \mid \mathbf{x}^* \in \text{PS} \right\} \quad (3)$$

3 基于动态分解和角度惩罚距离的高维多目标进化算法

3.1 DAEA概念定义

定义1 导向解.动态分解策略借助导向解实现对进化种群的分解.这里,导向解指能为种群中其他个体提供进化方向的解,其作用类似于传统分解方法中的参考向量.在DAEA中,使种群保持最大多样性的解被选作导向解.所有导向解的集合记作pivot.

定义2 类与孤点.在DAEA中,类指种群中进化方向相近的个体聚集形成的子种群,其根据非导向解

与导向解之间的距离确定,非导向解被划分到与之距离最近的导向解确定的类中,即由第 i 个导向解 \mathbf{p}_i 确定的类 C_i 为

$$C_i = \{ \mathbf{x} \in \Omega \mid \text{distance}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) < \text{distance}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j), i \neq j \} \quad (4)$$

若某一类中只有一个解,则称这个解为孤点.孤点一定是导向解,因为如果孤点不是导向解,那么它必定会被划分到某一导向解的类中,这样这一个类至少有两个解.

定义3 拐点.文献[29]中将拐点定义为与超平面距离最远的点,并指出拐点可以加速收敛.类似地,在DAEA中,拐点定义为每一类中与理想点距离最近的点.此外,极值点和孤点也被视为拐点.

3.2 算法描述

3.2.1 算法流程

DAEA基本流程如算法1所示.

算法1 DAEA基本流程

输入:种群规模 N ,最大迭代次数 FE_{\max} ,惩罚控制参数 α

输出:最终解集 P

- 1 随机生成初始种群 P ,并对 P 归一化
- 2 初始化拐点标志集 $\text{Knee} = \text{zeros}(1, N)$
- 3 确定极值点集 Extreme ,并令 $\text{Knee}(\text{Extreme})=1$
- 4 计算 m 近邻角度,用作匹配选择的个体多样性标准 Div
- 5 **WHILE** $FE \leq FE_{\max}$ **DO**
- 6 FrontNo =非支配排序(P)
- 7 $P \Leftarrow$ 匹配选择($P, \text{FrontNo}, \text{Knee}, \text{Div}$)
- 8 $P \Leftarrow$ 交叉变异操作(P)
- 9 $[P, \text{Knee}, \text{Div}] =$ 环境选择($P \cup P', N, FE_{\max}, \alpha$)
- 10 **END WHILE**
- 11 **RETURN** P

首先,随机生成包含 N 个个体的初始种群 P (N 为预先设定的种群规模),并根据理想点 $\mathbf{z}^{\min} = (z_1^{\min}, z_2^{\min}, \dots, z_m^{\min})$ 和底点 $\mathbf{z}^{\max} = (z_1^{\max}, z_2^{\max}, \dots, z_m^{\max})$ 进行如下归一化,得到个体的归一化目标向量:

$$f_j'(\mathbf{x}_i) = \frac{f_j(\mathbf{x}_i) - z_j^{\min}}{z_j^{\max} - z_j^{\min}}, j = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

式中, $z_j^{\min} = \min_{i=1}^{|\mathcal{P}|} f_j(\mathbf{x}_i), z_j^{\max} = \max_{i=1}^{|\mathcal{P}|} f_j(\mathbf{x}_i)$.

接着,确定匹配选择所需的拐点标志集 Knee 和个体多样性标准 Div . Knee 中元素为0或1,分别表示对应的个体“不是拐点”和“是拐点”,并初始化为全0.为使个体在目标空间中广泛分布,极值点被给予优先性并被视为拐点,其中,沿第 i 个目标轴的极值点 \mathbf{e}_i 通过使下述成绩标量函数(Achievement Scalarizing Function, ASF)最小化得到:

$$\text{ASF}(\mathbf{x}, \mathbf{w}_i) = \max_{j=1}^m \frac{f_j'(\mathbf{x})}{w_{ij}} \quad (6)$$

式中, $w_i = (w_{i,1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,m})$, 表示第 i 个目标轴向量, 且 $i=j$ 时 $w_{i,j} = 1$, $i \neq j$ 时 $w_{i,j} = 10^{-6}$. 个体的多样性标准用 m 近邻角度衡量, 计算为距个体最近的 m 个个体的角度平均值, 值越大, 多样性越好.

然后, 重复执行下述操作直至最大迭代次数. 首先通过非支配排序得到个体的非支配层序号 FrontNo, 根据 FrontNo、Knee、Div 进行匹配选择, 再通过交叉变异操作生成子代种群并与父代种群合并, 最后对种群规模为 $2N$ 的合并种群进行动态分解和基于角度惩罚距离的个体选择, 得到含有 N 个个体的最终解集.

3.2.2 匹配选择

在 DAEA 中, 匹配选择依次考虑收敛性与多样性, 设计基于 Pareto 支配、Knee、Div 三原则的二元锦标赛选择机制, 从而选择潜解产生子代, 具体如下: 从种群中随机选择两个个体, 若一个个体被另一个个体支配, 选择非支配个体进入匹配池; 若两者互为非支配, 选择“是拐点”一方进入匹配池; 若两者都是或者都不是拐点, 选择多样性较好 (即 Div 较大) 的个体进入匹配池; 若上述 3 个标准都无法区分个体, 随机选择一个个体进入匹配池. 重复执行直至匹配池中包含 N 个个体.

3.2.3 动态分解

环境选择过程如算法 2 所示, 主要包含两个过程, 即动态分解和基于角度惩罚距离的个体选择. 动态分解旨在通过最大化多样性来确定导向解, 并根据导向解将种群划分成多个类, 这一过程无需预先设定参考向量, 使 DAEA 能够解决 PF 形状不规则的优化问题. 基于角度惩罚距离的个体选择从每一类中选择个体, 通过适应值计算将收敛性与多样性融合到一个标量值中, 有利于实现两者的平衡.

动态分解之前, 先利用 Pareto 支配对合并种群进行预选择, 去除收敛性差的解. 具体操作: 对合并种群 Q 进行非支配排序, 保留临界层 F_l 以及临界层之前的个体至 P 并按照式 (5) 进行归一化, 而后依下述过程进行动态分解. 这里, F_l 指非支配层序号为 l 的个体的集合, l 是使 $|F_l \cup F_2 \cup \dots \cup F_l| \geq N$ 的最小值.

首先, 初始化导向解集 pivot 为空集, 用来存储已找出的导向解. 为保证种群分布性, 极值点最先进入 pivot. 然后, 从剩余解中逐一选择导向解, 直至 $|\text{pivot}| = N$. 该选择过程基于以下考虑: 进化过程中, 沿相同或近似方向搜索目标空间的解是多余的, 各个解应沿不同方向搜索, 因此, 为最大化多样性, 导向解应尽可能广泛分布在目标空间, 或者说, 导向解之间的相互距离应尽可能远. 在 DAEA 中, 解之间的距离用式 (7) 所示的角度衡量, 角度越小, 距离越近, 即

算法 2 环境选择 (Q, N, FE_{\max}, α)

输入: 合并种群 Q , 种群规模 N , 最大迭代次数 FE_{\max} , 惩罚控制参数 α

输出: 下一代种群 P , 拐点标志集 Knee, 多样性标准 Div

```

1   $[F_1, F_2, \dots, F_l, \dots]$  = 非支配排序 ( $Q$ )
2   $P = [F_1, F_2, \dots, F_l]$  //  $l$  是使  $|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_l| \geq N$  的最小值
3   $P$  = 归一化 ( $P$ )
4  /* 动态分解 */
5  pivot =  $\emptyset$ 
6  pivot = [pivot, Extreme] // Extreme 是  $P$  的极值点集
7  WHILE  $|\text{pivot}| < N$  DO
    计算每个剩余解到已有导向解的距离, 并将其中的最近
    距离作为该剩余解到 pivot 的距离
    把距 pivot 最近的解添加到 pivot 中
8  END WHILE
9  Cluster = 根据非导向解与导向解之间的距离, 把非导向解划
    分到各类中
10 /* 从每类中选择个体 */
11  $[P, \text{Knee}]$  = 基于角度惩罚距离从每类中选择个体 ( $P, N,$ 
     $FE_{\max}, \alpha, \text{Cluster}, \text{pivot}$ )
12 Div = 更新种群中个体的  $m$  近邻角度
13 RETURN  $P, \text{Knee}, \text{Div}$ 

```

$$\text{Angle}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \arccos \left(\frac{\mathbf{F}'(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{F}'(\mathbf{x}_j)}{|\mathbf{F}'(\mathbf{x}_i)|_2 \cdot |\mathbf{F}'(\mathbf{x}_j)|_2} \right) \quad (7)$$

式中, \mathbf{F}' 表示归一化目标向量, $|\mathbf{F}'|_2$ 表示向量 2-范数. 得到每个剩余解到导向解的角度后, 以其中最小角度作为该剩余解到 pivot 的距离, 然后选择距 pivot 最近的解作为新加入的导向解, 直至找出 N 个导向解. 接着, 根据定义 2 及式 (4), 把非导向解划分到导向解确定的类中, 即对任一非导向解, 它被划分到与导向解 p_i 同属一类, 当且仅当该非导向解与 p_i 的角度小于与其他导向解的角度.

上述过程可用图 1 表示. 图 1 中所示种群有 8 个个体 ($s_1 \sim s_8$), 需选择 4 个导向解, 实心圆和空心圆分别表示导向解和剩余解, 虚线表示两相邻导向解的角平分线. 图 1(a) 中, s_8 和 s_1 分别是沿 f_1 和 f_2 方向的极值点, 它们最先加入导向解集 pivot. s_2 到 pivot 的距离为 $\{\angle s_2 s_1, \angle s_2 s_8\}$ 中的较小值, 即 $\angle s_2 s_1$, 同理可得 $s_3 \sim s_7$ 到 pivot 的距离为 $\angle s_3 s_1, \angle s_4 s_1, \angle s_5 s_8, \angle s_6 s_8, \angle s_7 s_8$, 其中 $\angle s_5 s_8$ 最大, 即 s_5 距离 pivot 最远, 因此在图 1(b) 中, s_5 被选择进 pivot 中. 接着得到 $s_2 \sim s_4, s_6, s_7$ 到 pivot 的距离为 $\angle s_2 s_1, \angle s_3 s_5, \angle s_4 s_5, \angle s_6 s_5, \angle s_7 s_8$, 其中 $\angle s_3 s_5$ 最大, 因此在图 1(c) 中, s_3 被选择到 pivot 中. 最终得到 $\text{pivot} = [s_1, s_3, s_5, s_8]$, 最后把非导向解划到与之距离最近的导向解的类中, 得到 4 个类: $\{s_1\}, \{s_2, s_3, s_4\}, \{s_5, s_6\}, \{s_7, s_8\}$, 分别代表不同的进化方向.

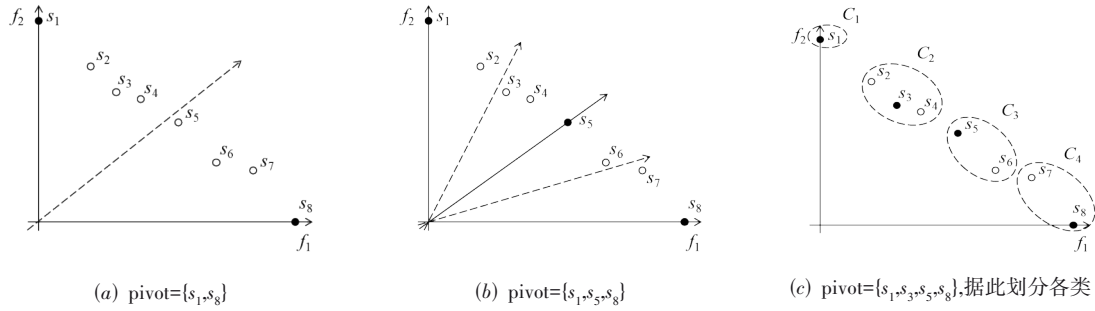


图1 动态分解示意图

3.2.4 基于改进角度惩罚距离的个体选择

在动态分解将种群分成 N 个类后, 需要从每个类中选出能平衡收敛性和多样性的解. RVEA (Reference Vector guided Evolutionary Algorithm)^[30] 中的角度惩罚距离 (Angle Penalty Distance, APD) 根据迭代过程调整对收敛性和多样性的偏重, 原文献实验结果表明, APD 可以较好平衡收敛性与多样性, 然而 APD 中的多样性相关项需要参照预先设定的参考向量, 无法直接应用到 DAEA 中, 因此将其改进为 dAPD (dynamic Angle Penalty Distance), 据此从每类中选择个体.

以图 1(c) 为例, 个体选择考虑以下 3 种情形: 情形 I, 类中含有极值点; 情形 II, 类中含有孤点; 情形 III, 除 I 和 II 外的其他情形.

情形 I 类中含有极值点, 如 C_1, C_4 .

为保证个体分布的广泛性, 当类中含有极值点时, 优先选择极值点而无需将极值点与其他解进行比较, 同时直接删除类中除极值点外的其他解. 以 $C_4 = \{s_7, s_8\}$ 为例, 极值点 s_8 被选中, 且其拐点标志记为 1, 即 $Knee(s_8) = 1$, 且 s_7 被直接删除.

情形 II 类中含有孤点, 如 C_1 .

由定义 2 知, 孤点一定是导向解. 此情形下, 孤点对维持种群多样性有重要作用, 它意味着孤点周围区域可能未被充分探索, 因此, 孤点也直接被选择进入下一代种群, 且其拐点标志记为 1, 如 $C_1 = \{s_1\}$ 中, s_1 被选中, 且 $Knee(s_1) = 1$.

情形 III 其他情形, 如 C_2, C_3 .

若类中不含极值点且至少含两个解, 则利用改进的角度惩罚距离 dAPD 从每类中选择能平衡收敛性和多样性的个体, dAPD 越小, 个体综合性能越好.

$$dAPD = (1 + P(\theta)) \cdot d_c \quad (8)$$

dAPD 主要与两项因素有关, 一个是收敛性相关项 d_c , 它与 APD 中的收敛性相关项一致, 都用个体到理想点的欧氏距离表征, 即 $d_c = \|F'(x)\|$, 距离越小, 收敛性越好; 另一个是多样性相关项 $P(\theta)$:

$$P(\theta) = m \cdot \left(\frac{t}{t_{max}} \right)^\alpha \cdot \sin \theta \quad (9)$$

式中, m 为优化目标个数, t_{max} 为最大进化代数, α 为惩罚控制参数, θ 为类中个体到该类导向解的角度, 用以衡量个体与导向解在搜索方向的相似程度, θ 越小, 个体多样性越好, 相应地, 施加的惩罚项就需越小, 所以此处采用角度的正弦值.

d_c 与 $P(\theta)$ 的结合可以实现进化过程中收敛性与多样性的平衡. 进化初期, 即 $t \ll t_{max}$ 时, 种群中的个体距离 PF 较远, 此时选择个体时需偏重收敛性. 相应地, $t \ll t_{max}$ 时, $P(\theta) \approx 0$, $dAPD \approx d_c$, 类中个体主要通过收敛性能进行比较. 进化后期, 个体离 PF 较近, 此时偏重多样性, 将使个体沿 PF 分布更均匀. 相应地, 在 dAPD 中, 随进化代数 t 增加, $P(\theta)$ 增大, 个体比较时多样性的影响越来越大.

得到类中每个个体的 dAPD 后, 选择其值最小的个体进入下一代种群, 并令 d_c 最小的个体的拐点标志为 1. 以 $C_2 = \{s_2, s_3, s_4\}$ 为例, 情形 III 中基于 dAPD 的个体选择过程如图 2 所示, 图 2 中 s_3 为该类的导向解.

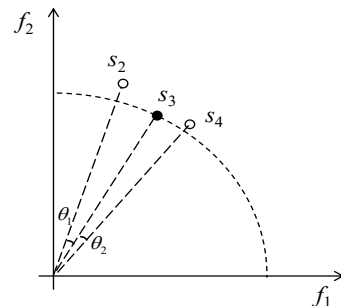


图2 情形 III 的个体选择过程

图 2 中, 过原点的虚线表示个体到理想点的欧氏距离, 且 $d_c(s_3) < d_c(s_4) < d_c(s_2)$, 可知, s_3 收敛性好于 s_2 和 s_4 , 所以 $Knee(s_3) = 1$. s_2 和 s_4 的多样性相关项分别用它们到 s_3 的角度表示, 即 θ_1 和 θ_2 且 $\theta_2 < \theta_1$, s_3 为导向解本身, 所以它的多样性相关项为 0. 根据式 (8) 计算 dAPD, 得 $dAPD(s_3) < dAPD(s_4) < dAPD(s_2)$, 所以从 C_2

中选择的个体是 s_3 .

需要注意的是,每一类中的导向解、选中解、拐点无必然联系. 导向解只提供进化方向,它的收敛性可能较差;拐点是每一类中距离理想点较近的解,它的收敛性较好,但多样性可能较差;只有选中解考虑了不同进化阶段收敛性与多样性的平衡. 如图3所示, s'_3 为导向解,但它的收敛性较差; $d_c(s_4) < d_c(s'_2) < d_c(s'_3)$, 所以 s_4 为拐点,但它的多样性差于 s'_2 ($\theta_2 > \theta'_1$), 若是进化初期, s_4 会被选中,但由于 s'_2 与 s_4 收敛性差距较小,进化达到某一阶段后, s'_2 会被选中. 上述过程也说明, dAPD 可在进化不同阶段平衡收敛性与多样性.

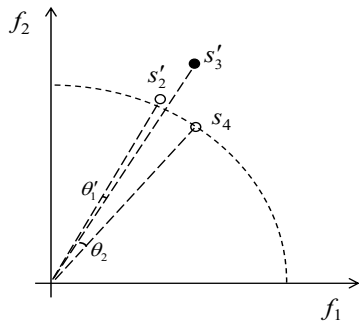


图3 类中的导向解、选中解、拐点

按照上述3种情形选择出个体后,更新用于匹配选择的多样性标准 Div, 即计算距离个体最近的 m 个角度的平均值. 整个环境选择完成后,返回下一代种群 P 、拐点标志集 Knee、多样性标准 Div.

3.3 讨论

本节讨论 DAEA 与 KnEA (Knee point-driven Evolutionary Algorithm)^[29]、RVEA^[30]、VaEA (Vector angle-based Evolutionary Algorithm)^[31] 的异同点. KnEA 是基于拐点的 MaOEA; RVEA 是基于参考向量的 MaOEA, 其中的角度惩罚距离可以平衡收敛性与多样性; VaEA 是基于向量角的 MaOEA, 利用“最大角度优先”和“较差删除”策略选择个体.

3.3.1 DAEA 与 KnEA 的异同点

相同点: (1) 都使用拐点促进收敛; (2) 匹配选择时都使用 Pareto 支配、拐点、多样性3个标准比较个体.

不同点: (1) 对拐点的使用不同, 在 KnEA 中, 拐点同时用在匹配选择和环境选择中, 在 DAEA 中, 拐点只用在匹配选择中; (2) 匹配选择的多样性标准不同, KnEA 通过欧氏距离计算拥挤度作为匹配选择的多样性标准, 而 DAEA 用 m 个最近角度的平均值作为匹配选择的多样性标准.

3.3.2 DAEA 与 RVEA 的异同点

相同点: 角度惩罚距离中, 都使用个体到理想点的欧氏距离作为收敛性相关项.

不同点: (1) 分解方法不同, RVEA 需要预先设定参考向量, 将解关联到最近的参考向量上, 对 PF 不规则优化问题效果欠佳, 而 DAEA 无需参考向量, 利用种群自身分布信息进行分解; (2) 角度惩罚距离中, 衡量多样性使用的角度不同, 在 RVEA 的 APD 中, 角度是指解与其关联参考向量的角度, 而在 DAEA 的 dAPD 中, 角度是指解和类中导向解的角度; (3) 多样性的表征不同, RVEA 的 APD 中使用归一化角度, 需要额外计算关联参考向量和与之距离最近的参考向量之间的角度, 而 DAEA 中的 dAPD 使用角度的正弦值, 无需归一化, 也无需额外计算, 因为解到导向解的角度在划分类时已经得到.

3.3.3 DAEA 与 VaEA 的异同点

相同点: 都使用向量角概念和“最大角度优先”原则.

不同点: (1) 使用“最大角度优先”的目的不同, VaEA 中, “最大角度优先”配合使用“较差删除”, 旨在直接选择个体, 而 DAEA 中, “最大角度优先”旨在找出导向解, 进而将种群分成多个类; (2) 环境选择策略不同, VaEA 中, 当两个最近解之间的角度小于规定阈值时, 两者之中目标之和较大的一个被删除, 而在 DAEA 中, 动态分解以后, 基于改进的角度惩罚距离从每类中选择个体.

4 实验仿真结果与分析

为验证 DAEA 有效性, 选取9种高维多目标进化算法: MOEA/D^[16]、NSGA-III^[22]、KnEA^[29]、RVEA^[30]、VaEA^[31]、hpaEA (hyperplane assisted Evolutionary Algorithm)^[32]、DGEA (Direction Guided Evolutionary Algorithm)^[33]、TSTI (Two-Stage evolutionary algorithm with Three Indicators)^[34]、TriP (Tri-Population based coevolutionary algorithm)^[35] 进行对比, 所有实验借助进化多目标优化平台 PlatEMO^[36] 进行.

4.1 测试问题与评价指标

测试问题从目前常用的3个高维多目标优化测试集 DTLZ (Diode-Transistor Logic with Zener diode)、WFG (Walking Fish Group)、MaF (Method-anchored test Fragmentation) 中选取27个函数, DTLZ1~DTLZ7、IDTLZ1~IDTLZ2、WFG1~WFG9、MaF1~MaF9. 其中 DTLZ1~DTLZ4、WFG4~WFG9 被归为一类, 它们有规则的 PF 称为“规则测试集”. 其余测试题 PF 不规则, 比如不连续、退化等, 为便于讨论, 这些不规则测试题被分为两类: 一是 DTLZ5~DTLZ7、IDTLZ1~IDTLZ2、WFG1~WFG3, 称为“不规则测试集”; 二是 MaF1~MaF9, 称为“MaF 测试集”. 不规则测试题的问题特征如表1所示. 测试目标个数取3、5、8、10、15. 评价指标采用反转世代距离 IGD 和超体积 (HyperVolume, HV), 它们能综合反映算法的收敛性和多样性.

4.2 实验参数设置

所有算法均采用模拟二进制交叉和多项式变异算

表 1 不规则测试题的问题特征

问题特征	测试题
线性 PF	IDTLZ1, MaF1, WFG3
凸 PF	IDTLZ2, MaF3, MaF4
凹 PF	DTLZ5, DTLZ6, MaF2, MaF5, MaF6
混合 PF	DTLZ7, WFG1, MaF7
退化 PF	DTLZ5, DTLZ6, WFG3, MaF6
不连续 PF	DTLZ7, MaF7
逆 PF	IDTLZ1, IDTLZ2, MaF1, MaF4
多模	DTLZ7, WFG2, MaF3, MaF4, MaF7
有偏	WFG1, MaF5
不可分	WFG2, WFG3

表 3 最大迭代次数($\times 10^4$)

m	3	5	8	10	15
DTLZ1~DTLZ4	2.10	4.20	3.12	5.50	2.70
DTLZ5~DTLZ7	5.25	10.50	7.80	13.75	6.75
IDTLZ1~IDTLZ2	5.25	10.50	15.60	27.50	20.25
WFG1~WFG3	3.15	6.30	7.80	13.75	13.50
WFG4~WFG9	2.00	6.00	8.00	10.00	15.00
MaF1	2.00	4.00	6.00	7.00	10.00
MaF2	6.00	8.00	12.00	12.00	15.00
MaF3	6.00	8.00	15.00	15.00	20.00
MaF4	1.00	2.00	2.00	2.00	4.00
MaF5	2.00	4.00	4.00	4.00	6.00
MaF6	3.00	4.00	6.00	7.00	10.00
MaF7	6.00	8.00	8.00	8.00	10.00
MaF8	6.00	6.00	6.00	6.00	10.00
MaF9	6.00	6.00	6.00	6.00	10.00

子,算子中的两个参数 $\eta_c = \eta_m = 20$,交叉概率为1,变异概率为 $1/D$ (D 为决策变量维度).对比算法参数设置与原文献一致.DAEA中,惩罚控制参数 α 与RVEA一致,取值2.

种群规模 N 用双层法确定,如表2所示,其中 H_1, H_2 分别是外层和内层沿目标轴的分段数.

表 2 种群规模

m	分段数(H_1, H_2)	种群规模 N
3	13, 0	105
5	10, 0	210
8	3, 2	156
10	3, 2	275
15	2, 1	135

最大迭代次数参照文献[23,37]设置,如表3所示.

4.3 实验结果分析

各实验独立运行30次,得到平均值和标准差,为判断DAEA与对比算法的平均值有无显著差异,进行显著性水平为0.05的Wilcoxon秩和检验,下文表格中“+”“-”“=”分别表示对比算法显著优于、显著劣于、无差别于DAEA,“rank”表示算法在测试集上的平均排名,排

名越小,算法性能越好,排名第一的算法加粗显示.

表4为各算法在规则测试集上的Wilcoxon秩和检验结果.从IGD看,DAEA显著优于对比的9种算法,显著占优的比例分别为74%、52%、94%、54%、74%、62%、100%、64%、82%,排名前三的算法是DAEA、RVEA、NSGA-III.从HV看,DAEA显著优于MOEA/D、VaEA、hpaEA、DGEA、TSTI、TriP,显著占优的比例分别为68%、86%、62%、94%、92%、92%,与KnEA差别不大,但显著劣于NSGA-III和RVEA,显著占劣的比例分别为70%和56%,排名前三的算法是NSGA-III、RVEA、DAEA.综合来看,在规则测试集上,使用预先设定的均匀分布的参考向量进行分解的方法(如NSGA-III和RVEA)总体优于其他方法,这是由于参考向量的分布与规则测试集PF一致,当两者不一致时,这类方法的性能会出现退化,而DAEA仍可以保持较优性能(由下述不规则测试集和MaF测试集实验结果可验证).

表 4 规则测试集 Wilcoxon 秩和检验结果

	IGD				HV			
	+	-	=	rank	+	-	=	rank
MOEA/D	10	37	3	7.36 (9)	12	34	4	7.22 (9)
NSGA-III	20	26	4	4.20 (3)	35	4	11	2.32 (1)
KnEA	1	47	2	6.50 (8)	20	21	9	4.04 (4)
RVEA	19	27	4	4.16 (2)	28	16	6	3.22 (2)
VaEA	2	37	11	4.36 (4)	0	43	7	5.18 (6)
hpaEA	12	31	7	5.78 (6)	7	31	12	4.84 (5)
DGEA	0	50	0	8.18 (10)	0	47	3	8.76 (10)
TSTI	14	32	4	5.64 (5)	0	46	4	7.20 (8)
TriP	4	41	5	5.96 (7)	2	46	2	7.18 (7)
DAEA				2.86 (1)				3.38 (3)

表5为各算法在不规则测试集上的Wilcoxon秩和检验结果.从IGD看,DAEA显著优于对比的9种算法,显著占优的比例分别为77.5%、50%、42.5%、70%、55%、55%、85%、70%、57.5%,排名前三的算法是

DAEA、VaEA、hpaEA.从HV看,DAEA显著优于除NSGA-III外的其他8种对比算法,显著占优的比例分别为67.5%、67.5%、60%、50%、57.5%、75%、52.5%、70%,排名前三的算法是NSGA-III、DAEA、VaEA.

表5 不规则测试集Wilcoxon秩和检验结果

	IGD				HV			
	+	-	=	rank	+	-	=	rank
MOEA/D	9	31	0	6.975 (9)	11	27	2	6.275 (9)
NSGA-III	12	20	8	4.850 (6)	17	16	7	3.725 (1)
KnEA	12	17	11	4.550 (4)	9	27	4	5.150 (5)
RVEA	5	28	7	6.425 (7)	13	24	3	5.825 (8)
VaEA	12	22	6	4.475 (2)	12	20	8	4.850 (3)
hpaEA	13	22	5	4.475 (2)	10	23	7	5.475 (6)
DGEA	4	34	2	8.250 (10)	8	30	2	7.750 (10)
TSTI	10	28	2	6.525 (8)	14	21	5	4.950 (4)
TriP	14	23	3	4.825 (5)	9	28	3	5.700 (7)
DAEA				3.650 (1)				3.850 (2)

表6为各算法在MaF测试集上的Wilcoxon秩和检验结果.无论是IGD和HV,DAEA都显著优于对比的9种算法,排名分别为第一和第二,体现出DAEA在处理复杂PF时的有效性.DAEA在IGD上显著占优的比

例分别为75.6%、68.9%、68.9%、77.8%、51.1%、62.2%、88.9%、68.9%、53.3%,在HV上显著占优的比例分别为68.9%、44.4%、55.6%、73.3%、48.9%、40%、84.4%、77.8%、73.3%.

表6 MaF测试集Wilcoxon秩和检验结果

	IGD				HV			
	+	-	=	rank	+	-	=	rank
MOEA/D	9	34	2	7.20 (9)	12	31	2	6.29 (7)
NSGA-III	6	31	8	5.51 (7)	14	20	11	4.20 (4)
KnEA	9	31	5	5.40 (5)	12	25	8	5.18 (5)
RVEA	9	35	1	6.69 (8)	10	33	2	6.33 (8)
VaEA	7	23	15	3.84 (2)	9	22	14	4.18 (3)
hpaEA	10	28	7	4.62 (3)	16	18	11	3.40 (1)
DGEA	3	40	2	8.20 (10)	5	38	2	8.24 (10)
TSTI	11	31	3	5.47 (6)	3	35	7	6.49 (9)
TriP	16	24	5	4.87 (4)	4	33	8	6.20 (6)
DAEA				3.20 (1)				3.44 (2)

综上所述,DAEA在不规则测试集和MaF测试集上的表现好于在规则测试集上的表现.这是因为,在不规则测试集和MaF测试集中,优化问题的PF复杂多样,仅靠预先设定的在整个目标空间均匀分布的参考向量无法与这些不规则形状的PF匹配,而DAEA不依赖参考向量,根据当前种群的个体分布信息确定导向解,再利用导向解对目标空间进行分解,由于在进化过程中,种群逐渐向最优PF靠近,所以导向解也就能逐渐反映PF的形状特性,起到引导种群进化的作用,从而有效求解PF形状不规则的优化问题.

为直观比较算法性能,以8目标DTLZ4和8目标MaF1为例,通过平行坐标系展示各算法在以HV作为

评价指标时的优化结果,如图4和图5所示.

DTLZ4是凹PF规则测试题.在图4中,MOEA/D存在目标缺失;DGEA、TSTI、TriP收敛性较差;VaEA在第3个、第4个目标上目标值没有收敛到1;hpaEA在第4个、第5个、第7个目标上目标值没有收敛到1,在第6个目标的[0.4,0.6]区间内没有解分布.说明这些算法在8目标DTLZ4上优化结果的收敛性和多样性不佳.NSGA-III、KnEA、RVEA的收敛性与DAEA无显著差别,但它们的多样性略差,DAEA解分布更接近真实PF解分布.

MaF1是逆PF的不规则测试题.在图5中,MOEA/D、RVEA、DGEA的解分布显著劣于DAEA;NSGA-III、KnEA、hpaEA的某些目标值没有散布于整个目标空间;

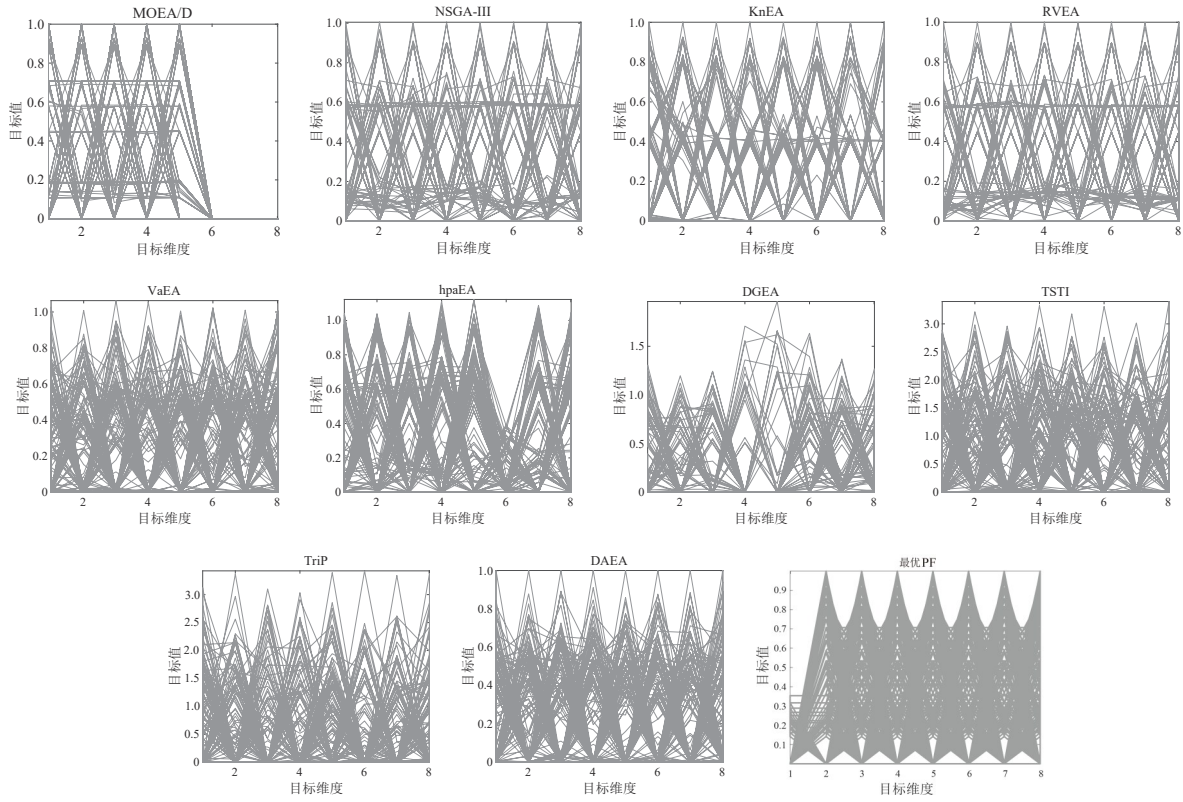


图4 各算法在8目标 DTLZ4上的优化结果

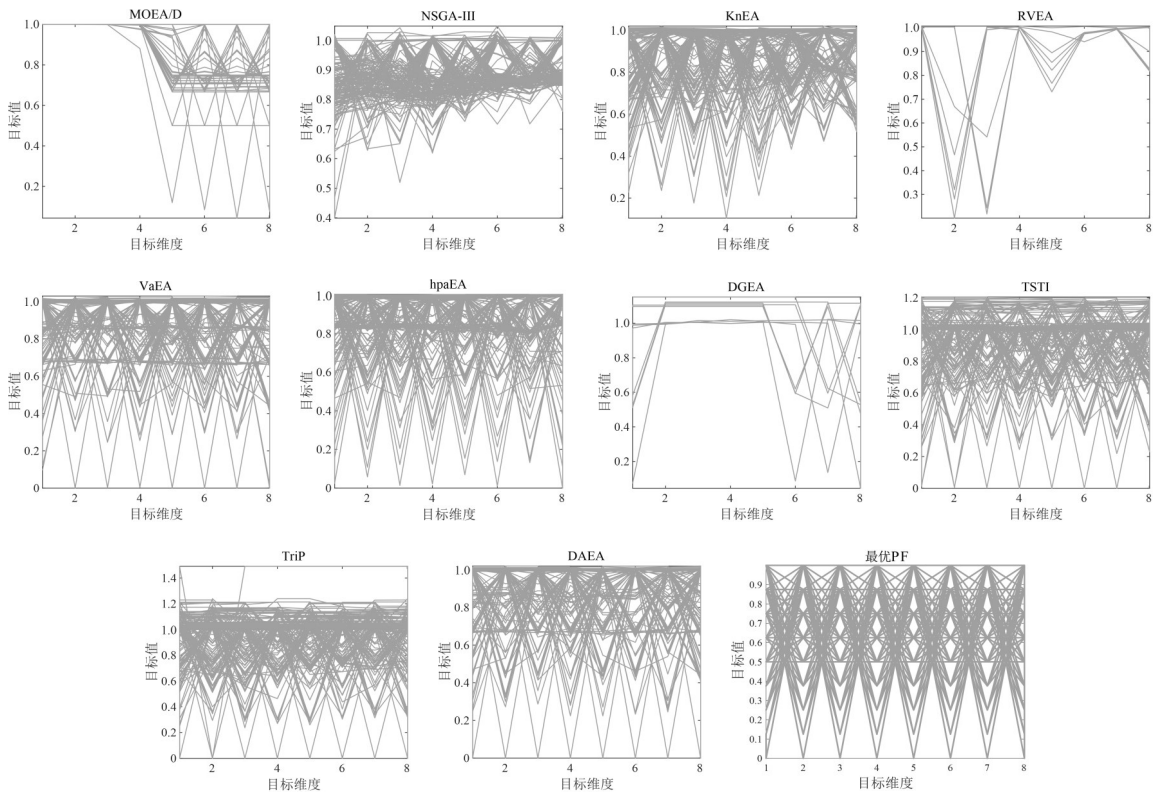


图5 各算法在8目标 MaF1上的优化结果

TSTI、TriP 的目标值没有收敛到 1; VaEA 与 DAEA 性能较为接近, 它们解分布的收敛性和多样性都优于其他算法. 综合图 4、图 5, DTLZ4 上表现好的 NSGA-III、KnEA、RVEA 在 MaF1 上性能下降, MaF1 上表现相对好的 VaEA、hpaEA 在 DTLZ4 上性能下降, 只有 DAEA 能较

好处理这两个不同类型的问题, 验证了 DAEA 的有效性.

为进一步分析比较各算法在不同优化目标个数上的性能, 将算法在相同数目目标测试题上的排名取平均值, 如图 6 所示.

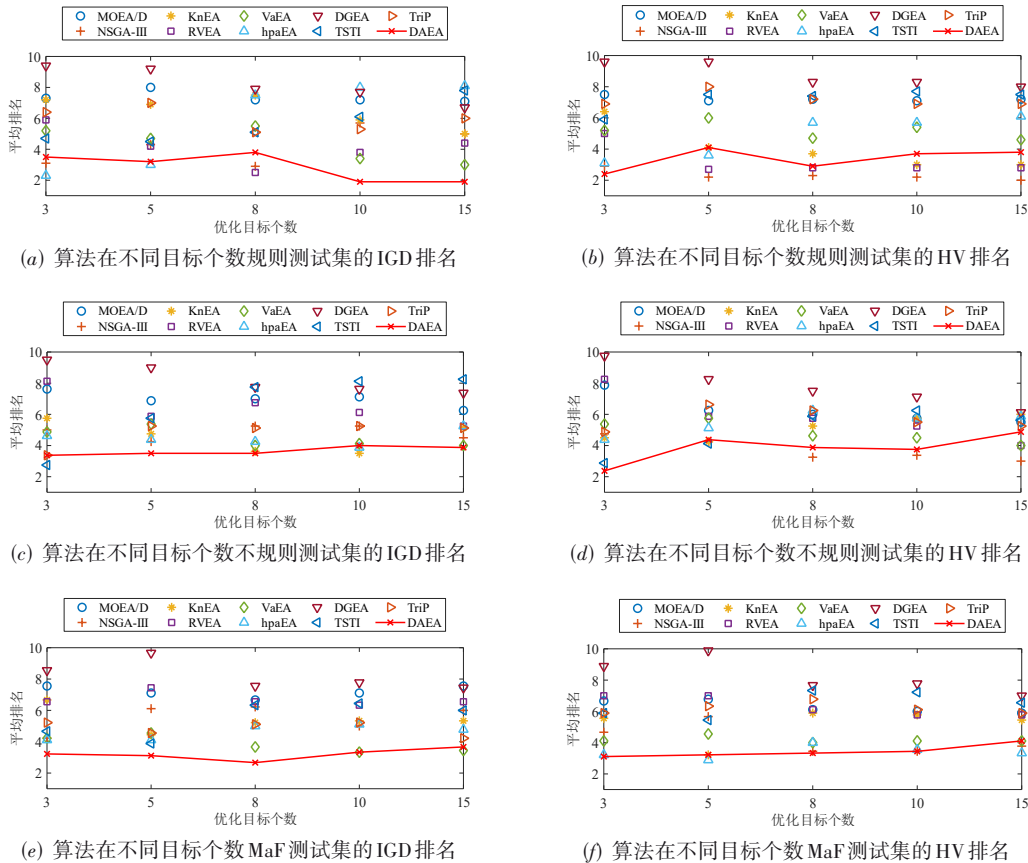


图6 算法在不同目标个数测试集的排名

如图 6 所示, DAEA 在各目标个数上表现较均衡. 这是因为, DAEA 在动态分解之前先根据 Pareto 支配对种群中的个体进行预选择, 保留临界层及其之前层级的个体, 使解集在目标个数较少时(如 3 目标)具备较好的收敛性; 当目标个数增多时, 仅靠 Pareto 支配无法有效选择个体, 此时对预选择之后的种群进行动态分解和基于改进角度惩罚距离的个体选择, 有效平衡收敛性与多样性, 使解集在目标个数较多时(如 5、8、10、15 目标)具备较好的性能.

上述从算法整体性能和算法在不同目标个数上的性能两方面对各算法进行对比分析, 可得出以下两个结论.

(1) 不管优化问题的 PF 是规则的还是不规则的, DAEA 均能取得较好的效果. 尽管在规则测试集上, 用 HV 评估的 DAEA 性能相比用 IGD 评估时有所降低, 但它仍然好于一些经典算法和最新算法, 仅落后于 NSGA-III 和 RVEA.

(2) DAEA 在不同目标个数上的排名曲线无较大波动, 说明 DAEA 性能稳定, 可以求解不同目标个数的优化问题.

4.4 策略验证

为验证动态分解策略和改进角度惩罚距离的有效性, 设计两种 DAEA 变体算法: DAEA-NDD、DAEA-APD. 其中, DAEA-NDD 用固定的参考向量进行目标空间分解, 代替 DAEA 中的动态分解; DAEA-APD 用 RVEA 中的角度惩罚距离选择个体, 代替 DAEA 中改进的角度惩罚距离. 对两种变体算法按照前述实验设置进行实验, 对得到的 IGD 和 HV 进行 Wilcoxon 秩和检验, 结果如表 7 所示.

首先, 分析动态分解策略的有效性. 对规则测试集来说, DAEA-NDD 在 IGD 和 HV 两个指标上都显著优于 DAEA, 说明在处理 PF 形状规则的优化问题时, 动态分解无效. 这是由于固定的参考向量已经能够与规则的 PF 形状较好匹配, 无需调整即可引导进化种群中的个体

表 7 DAEA 及其变体算法 Wilcoxon 秩和检验结果

测试集	算法	IGD				HV			
		+	-	=	rank	+	-	=	rank
规则测试集	DAEA-NDD	27	22	1	1.88 (2)	45	2	3	1.10 (1)
	DAEA-APD	0	7	43	2.28 (3)	0	11	39	2.72 (3)
	DAEA				1.82 (1)				2.08 (2)
不规则测试集	DAEA-NDD	10	26	4	2.33 (3)	17	18	5	1.98 (2)
	DAEA-APD	2	6	32	1.98 (2)	6	5	29	2.03 (3)
	DAEA				1.70 (1)				1.88 (1)
MaF 测试集	DAEA-NDD	8	35	2	2.56 (3)	17	26	2	2.16 (3)
	DAEA-APD	2	6	37	1.82 (2)	2	9	34	2.13 (2)
	DAEA				1.62 (1)				1.64 (1)

均匀分布在目标空间,使种群保持较好的多样性,此时若使用动态分解引导种群进化反而会破坏这种多样性,使解集性能变差. 对不规则测试集来说,DAEA-NDD 在 IGD 指标上显著劣于、在 HV 指标上几乎无差别于 DAEA,对 MaF 测试集来说,DAEA-NDD 在 IGD 和 HV 两个指标上都显著劣于 DAEA,说明在处理 PF 形状不规则的优化问题时,动态分解有效. 这是由于固定的参考向量无法与不规则的 PF 形状匹配,而动态分解可以根据进化种群中的个体分布选择导向解,起到类似动态调整参考向量的作用,从而有效解决 PF 不规则的优化问题.

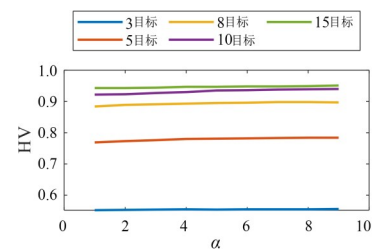
接着,分析改进角度惩罚距离的有效性. 对不规则测试集来说,DAEA-APD 在 HV 指标上几乎无差别于 DAEA,除此之外的其他情形下,DAEA-APD 都显著劣于 DAEA,说明与 RVEA 中原始的角度惩罚距离相比,改进的角度惩罚距离有效,在进化过程中具有较好的平衡收敛性与多样性.

此外,就不规则测试集和 MaF 测试集上两个变体算法显著变差的个数而言,缺省动态分解策略的 DAEA-NDD 多于缺省改进角度惩罚距离的 DAEA-APD,说明在两个策略中,动态分解策略更为关键.

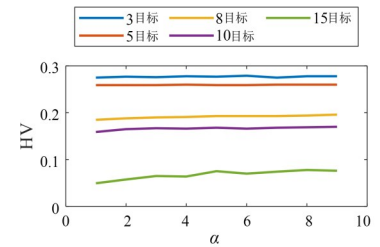
综上所述,动态分解策略和改进的角度惩罚距离有效(除动态分解策略对规则测试集外),且与改进的角度惩罚距离相比,动态分解策略更能明显提升算法性能.

4.5 参数敏感性分析

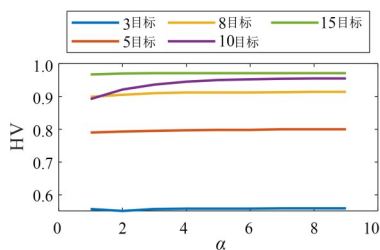
分别从 3 套测试集中选择一个测试题(WFG4、DTLZ7、MaF5),对惩罚控制参数 α 进行敏感性分析,记录 DAEA 在 α 从 1 到 9 变化时对应的 HV 值. 如图 7 所示,除 15 目标 DTLZ7 和 10 目标 MaF5 外,DAEA 对 α 的不同取值不敏感;在 15 目标 DTLZ7 上,HV 值曲线虽有波动,但总体呈上升趋势;在 10 目标 MaF5 上,HV 值曲线总体也呈上升趋势,且 α 在 [1,4] 时比 [4,9] 时曲线上明显. 综上所述,DAEA 对惩罚参数 α 不敏感,本文中 $\alpha=2$ 是可取的选择.



(a) WFG4



(b) DTLZ7



(c) MaF5

图 7 DAEA 在 α 从 1 到 9 变化时对应的 HV 值

5 总结

针对基于分解的多目标进化算法难以设置参考向量,以及高维目标空间中难以平衡收敛性与多样性的问题,本文提出一种新的高维多目标进化算法 DAEA. 它的特点在于不使用预先设定的参考向量分解目标空间,而是依据最大化多样性原则,从进化种群中选择导向解,进而利用导向解对目标空间进行动态分解,从而

避免参考向量调整这一复杂操作,有效求解PF形状不规则的多目标优化问题.此外,DAEA利用改进的角度惩罚距离,将收敛性和多样性融合为一个标量值,便于在进化过程中对两者进行平衡,其中收敛性用个体到理想点的欧氏距离表征,多样性用个体到导向解的角度正弦值表征.DAEA基于Pareto支配、拐点、多样性标准进行匹配选择,其中多样性标准用 m 近邻角度表示.在27例常用高维多目标优化测试题上与9种高维多目标进化算法进行对比,实验结果表明,DAEA能较好解决不同类型的高维多目标优化问题,并且在不同目标个数上具有稳定性.但是,策略验证实验也表明,动态分解策略对PF形状规则的多目标优化问题无效,即使用动态分解策略的效果不如使用固定参考向量分解的效果好,这是DAEA中动态分解策略的一个缺点.基于此,后续研究将更多关注如何同时有效求解PF形状规则和不规则的多目标优化问题,例如同时使用固定参考向量和动态调整的参考向量,此时需要注意两类参考向量的比例问题,以及如何有效调整参考向量.另一种思路是,通过学习、采样,或者其他方式判断优化问题的PF形状,再据此选择不同类型的参考向量对目标空间进行分解,此时若涉及模型训练,要注意效率问题.针对不同PF形状的多目标优化问题,有效的聚类方法也是值得研究的内容.接下来将进一步研究DAEA在约束高维多目标优化问题上的性能表现以及DAEA的实际应用.

参考文献

- [1] YE X, LIU S H, YIN Y L, et al. User-oriented many-objective cloud workflow scheduling based on an improved knee point driven evolutionary algorithm[J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 135: 113-124.
- [2] ZHOU J J, GAO L, YAO X F, et al. Evolutionary many-objective assembly of cloud services via angle and adversarial direction driven search[J]. Information Sciences, 2020, 513: 143-167.
- [3] 张凯, 陈彬, 许志伟. 基于多目标进化策略算法的DNA核酸编码设计[J]. 电子与信息学报, 2020, 42(6): 1365-1373.
ZHANG K, CHEN B, XU Z W. A multiobjective evolution strategy algorithm for DNA sequence design[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2020, 42(6): 1365-1373. (in Chinese)
- [4] 刘冰洁, 毕晓君. 一种基于角度信息的约束高维多目标进化算法[J]. 电子学报, 2021, 49(11): 2208-2216.
LIU B J, BI X J. A constrained many-objective evolutionary algorithm based on angle information[J]. Acta Electronica Sinica, 2021, 49(11): 2208-2216. (in Chinese)
- [5] 刘建昌, 李飞, 王洪海, 等. 进化高维多目标优化算法研究综述[J]. 控制与决策, 2018, 33(5): 879-887.
- [6] LIU J C, LI F, WANG H H, et al. Survey on evolutionary many-objective optimization algorithms[J]. Control and Decision, 2018, 33(5): 879-887. (in Chinese)
- [7] HE Z N, YEN G G, ZHANG J. Fuzzy-based Pareto optimality for many-objective evolutionary algorithms[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 18(2): 269-285.
- [8] DAS S S, ISLAM M M, ARAFAT N A. Evolutionary algorithm using adaptive fuzzy dominance and reference point for many-objective optimization[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2019, 44: 1092-1107.
- [9] YANG S X, LI M Q, LIU X H, et al. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 17(5): 721-736.
- [10] LI L, LI G P, CHANG L. A many-objective particle swarm optimization with grid dominance ranking and clustering[J]. Applied Soft Computing, 2020, 96: 106661.
- [11] TIAN Y, CHENG R, ZHANG X Y, et al. A strengthened dominance relation considering convergence and diversity for evolutionary many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 23(2): 331-345.
- [12] SHEN J T, WANG P, WANG X J. A controlled strengthened dominance relation for evolutionary many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(5): 3645-3657.
- [13] TIAN Y, CHENG R, ZHANG X Y, et al. An indicator-based multiobjective evolutionary algorithm with reference point adaptation for better versatility[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, 22(4): 609-622.
- [14] PAMULAPATI T, MALLIPEDDI R, SUGANTHAN P N. ISDE+ - An indicator for multi and many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 23(2): 346-352.
- [15] SUN Y N, YEN G G, YI Z. IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 23(2): 173-187.
- [16] LI F, CHENG R, LIU J C, et al. A two-stage R2 indicator based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. Applied Soft Computing, 2018, 67: 245-260.
- [17] ZHANG Q F, LI H. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2007, 11(6): 712-731.
- [18] QI Y T, MA X L, LIU F, et al. MOEA/D with adaptive weight adjustment[J]. Evolutionary Computation, 2014, 22(2): 231-264.
- [19] WANG Z K, ZHANG Q F, LI H, et al. On the use of two reference points in decomposition based multiobjective

- evolutionary algorithms[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2017, 34: 89-102.
- [19] MA X L, YU Y N, LI X D, et al. A survey of weight vector adjustment methods for decomposition-based multiobjective evolutionary algorithms[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2020, 24(4): 634-649.
- [20] HONG R, YAO F, LIAO T J, et al. Growing neural gas assisted evolutionary many-objective optimization for handling irregular Pareto fronts[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2023, 78: 101273.
- [21] WANG M J, LI X P, DAI Y, et al. An incremental learning evolutionary algorithm for many-objective optimization with irregular Pareto fronts[J]. Information Sciences, 2023, 642: 119115.
- [22] DEB K, JAIN H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: Solving problems with box constraints[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 18(4): 577-601.
- [23] XIANG Y, ZHOU Y R, YANG X W, et al. A many-objective evolutionary algorithm with pareto-adaptive reference points[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2020, 24(1): 99-113.
- [24] LIU S B, YU Q Y, LIN Q Z, et al. An adaptive clustering-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. Information Sciences, 2020, 537: 261-283.
- [25] FAN R, WEI L X, HU Z Y, et al. MMOEA-SP: A multi-stage many-objective evolutionary algorithm based on sampling points[J]. Knowledge-Based Systems, 2022, 246: 108677.
- [26] MING F, GONG W Y, WANG L. A two-stage evolutionary algorithm with balanced convergence and diversity for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2022, 52(10): 6222-6234.
- [27] SHEN J T, WANG P, DONG H C, et al. A multistage evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. Information Sciences, 2022, 589: 531-549.
- [28] ZHANG W, LIU J C, TAN S B, et al. A decomposition-rotation dominance based evolutionary algorithm with reference point adaption for many-objective optimization[J]. Expert Systems with Applications, 2023, 215: 119424.
- [29] ZHANG X Y, TIAN Y, JIN Y C. A knee point-driven evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2015, 19(6): 761-776.
- [30] CHENG R, JIN Y C, OLHOFFER M, et al. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 20(5): 773-791.
- [31] XIANG Y, ZHOU Y R, LI M Q, et al. A vector angle-based evolutionary algorithm for unconstrained many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2017, 21(1): 131-152.
- [32] CHEN H K, TIAN Y, PEDRYCZ W, et al. Hyperplane assisted evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(7): 3367-3380.
- [33] HE C, CHENG R, YAZDANI D. Adaptive offspring generation for evolutionary large-scale multiobjective optimization[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2022, 52(2): 786-798.
- [34] DONG J, GONG W Y, MING F, et al. A two-stage evolutionary algorithm based on three indicators for constrained multi-objective optimization[J]. Expert Systems with Applications, 2022, 195: 116499.
- [35] MING F, GONG W Y, WANG L, et al. A tri-population based co-evolutionary framework for constrained multi-objective optimization problems[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2022, 70: 101055.
- [36] TIAN Y, CHENG R, ZHANG X Y, et al. PlatEMO: A MATLAB platform for evolutionary multi-objective optimization[educational forum[J]. IEEE Computational Intelligence Magazine, 2017, 12(4): 73-87.
- [37] XU H, ZENG W H, ZENG X X, et al. A polar-metric-based evolutionary algorithm[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(7): 3429-3440.

作者简介



王旭健 男,山东寿光人.现为火箭军工程大学博士研究生.主要研究方向为多目标优化、阵列天线优化设计等.
E-mail: wxj_903@163.com



张峰干 男,河南洛阳人.现为火箭军工程大学副教授.主要研究方向为阵列信号处理、动中通系统优化设计等.
E-mail: zfg417@163.com



姚敏立 男,山西长治人.现为火箭军工程大学教授、博士生导师.主要研究方向为阵列信号处理、动中通系统优化设计等.
E-mail: yaominli66@163.com